Correction du DST n°4

Exercice 1

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{A^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}}$.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$A^2 = aA + bI \iff \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & -a & -a & -a \\ -a & 2a & -a & -a \\ -a & -a & 2a & -a \\ -a & -a & -a & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

   en étudiant l'égalité coefficient par coefficient on voit que celle ci est équivalente au système $\left\{ \begin{array}{rcl} a + b & = & \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2}a & = & -\frac{1}{2} \end{array} \right.$ dont l'unique solution est $a = 1$ et $b = \frac{3}{4}$.

   On en conclut que $\boxed{A^2 = A + \frac{3}{4}I}$.

3. Pour $n = 0$ on a $A^0 = I$ par définition.
   Supposons que pour un certain entier n on ait $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$. Alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A(\alpha_n A + \beta_n I) \\ &= \alpha_n A^2 + \beta_n AI \\ &= \alpha_n (A + \frac{3}{4}I) + \beta_n A \\ &= (\alpha_n + \beta_n)A + \frac{3}{4}\alpha_n I \end{aligned}$$

   donc $A^{n+1} = \alpha_{n+1}A + \beta_{n+1}I$ $\boxed{\text{avec } \alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n \text{ et } \beta_{n+1} = \frac{3}{4}\alpha_n.}$

   On en conclut par récurrence que <u>pour tout entier naturel n il existe deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$.</u>

4. (a) Pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{aligned} \alpha_{n+2} &= \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \\ &= \alpha_{n+1} + \frac{3}{4}\alpha_n \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{donc } (\alpha_n) \text{ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.}}$

   (b) L'équation caractéristique de (α_n) est $r^2 = r + \frac{3}{4} \iff 4r^2 - 4r - 3 = 0$.
   Après calcul ses solutions sont :

$$r_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{3}{2}$$

   On en déduit d'après le cours qu'il existe un couple (λ, μ) de réels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \lambda \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{3}{2}\right)^n \tag{1}$$

   Comme $A^0 = I = 0A + 1I$ et $A = 1A + 0I$ on a $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$, puis $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 0$.

En écrivant la relation 1 pour $n = 0$ et $n = 1$ on obtient donc :

$$\begin{cases} \lambda + \mu & = & 0 \\ \frac{\lambda}{2} + \frac{3\mu}{2} & = & 1 \end{cases}$$

d'où $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\mu = \frac{1}{2}$.
Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

(c) Pour tout $n \geq 1$ on a :$\beta_n = \dfrac{3}{4}\alpha_{n-1}$ donc $\beta_n = \dfrac{3}{8}\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$.

Lorsque $n = 0$, on sait que $\beta_0 = 1$. Voyons si cette formule marche toujours :

$$\frac{3}{8}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{0-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{0-1}\right) = \frac{3}{8}\left(\frac{2}{3} + 2\right) = 1$$

donc la formule $\beta_n = \dfrac{3}{8}\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ est finalement valable pour tout entier naturel n.

5. (a) De la relation $A^2 = A + \frac{3}{4}I$ on peut déduire $\frac{4}{3}(A^2 - A) = I$ donc $A \times \frac{4}{3}(A - I) = I$. Ainsi A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{4}{3}(A - I)$.

(b) Si on étend les définitions de (α_n) et (β_n) à $n = -1$ on obtient :

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

et

$$\beta_{-1} = \frac{3}{8}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right) = \frac{3}{8}\left(\frac{4}{9} - 4\right) = -\frac{4}{3}$$

or $A^{-1} = \frac{4}{3}A - \frac{4}{3}I = \alpha_{-1}A + \beta_{-1}I$ donc ces expressions sont encore valables pour $n = -1$.

6. En écrivant $\alpha_{-n} = \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-n} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-n}\right)$ et $\beta_{-n} = \dfrac{3}{8}\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-n-1} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-n-1}\right)$ on a :

$$\begin{aligned} A^n B_n &= (\alpha_n A + \beta_n I)(\alpha_{-n}A + \beta_{-n}I) \\ &= \alpha_n\alpha_{-n}A^2 + \alpha_n\beta_{-n}A + \beta_n\alpha_{-n}IA + \beta_n\beta_{-n}I^2 \\ &= \alpha_n\alpha_{-n}(A + \frac{3}{4}I) + \alpha_n\beta_{-n}A + \beta_n\alpha_{-n}A + \beta_n\beta_{-n}I \\ &= (\alpha_n\alpha_{-n} + \alpha_n\beta_{-n} + \alpha_{-n}\beta_n)A + \left(\frac{3}{4}\alpha_n\alpha_{-n} + \beta_n\beta_{-n}\right)I \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \alpha_n\alpha_{-n} &= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-n} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-n}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(1 - (-3)^n - (-3)^{-n} + 1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_n\beta_{-n} &= \frac{3}{16}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-n-1}\right) \\ &= \frac{3}{16}\left(\frac{2}{3} + 2 \times (-3)^n + \frac{2}{3} \times (-3)^{-n} - 2\right) \end{aligned}$$

$$\alpha_{-n}\beta_n = \frac{3}{16}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-n} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-n}\right)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$
$$= \frac{3}{16}\left(\frac{2}{3} + 2\times(-3)^n + \frac{2}{3}\times(-3)^n - 2\right)$$

$$\beta_n\beta_{-n} = \frac{9}{64}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-n-1}\right)$$
$$= \frac{9}{64}\left(\frac{4}{9} - 4\times(-3)^{n-1} - 4\times(-3)^{-n-1} + 4\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}\alpha_n\alpha_{-n} + \alpha_n\beta_{-n} + \alpha_{-n}\beta_n =& \frac{1}{16}\big(4 - 4\times(-3)^n - 4\times(-3)^{-n} + 4 + 2 + 6\times(-3)^n \\ &+ 2\times(-3)^{-n} - 6 + 2 + 6\times(-3)^n + 2\times(-3)^n - 6\big) \\ =& 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\alpha_n\alpha_{-n} + \beta_n\beta_{-n} &= \frac{1}{64}\left(12 - 12\times(-3)^n - 12\times(-3)^{-n} + 12 + 4 - 36\times(-3)^{n-1} - 36\times(-3)^{-n-1} + 36\right) \\ &= \frac{1}{64}\left(64 - 12\times(-3)^n - 12\times(-3)^{-n} - \frac{36}{-3}\times(-3)^n - \frac{36}{-3}\times(-3)^{-n}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

donc finalement : $A^n \times B_n = I$.

7. On peut en déduire que $B_n = (A^n)^{-1}$, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A^{-n} = \alpha_{-n}A + \beta_{-n}I$, donc les expressions de α_n et β_n sont finalement valables pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

1. À chaque manche il y a un seul vainqueur qui est A, B ou C. Puisque A et B ont chacun probabilité p de gagner, si on note q la probabilité de C de gagner une manche on a : $2p + q = 1$, donc $q = 1 - 2p$.
2. (a) Pour que l'un des joueurs gagne le jeu à l'issue de la deuxième manche, il faut qu'il gagne deux parties consécutives. La probabilité de gagner les deux premières partie est p^2 pour A et pour B, et pour C elle est de $(1-2p)^2$. Ces trois événements étant incompatibles, la probabilité que le jeu s'arrête au bout de 2 manches est de $2p^2 + (1-2p)^2$.
   (b) Puisque le jeu ne peut pas être gagné en une manche, il comporte au moins deux manches. L'événement « le jeu comporte au moins trois manches » est donc le contraire de « le jeu s'arrête au bout de deux manches ». Sa probabilité est donc $1 - 2p^2 - (1-2p)^2$.
   (c) A gagne le jeu à l'issue de la troisième manche si et seulement si A a aussi gagné la 2ème manche, et n'a pas gagné la 1ère manche (sinon il aurait gagné au bout de 2 manches). A perd la première manche avec probabilité $1-p$ et gagne les deux suivantes avec probabilité p^2. La probabilité de l'événement « A gagne à l'issue de la troisième manche » est donc $(1-p)) \times p^2 = p^2 - p^3$.
3. (a) $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(B_1) = p$ et $\mathbb{P}(C_1) = 1 - 2p$.
   Pour que A_2 soit réalisé, il faut que A_2 gagne la deuxième manche sans avoir gagné la première donc $\mathbb{P}(A_2) = (1-p)p$.
   De même, $\mathbb{P}(B_2) = (1-p)p$ et $\mathbb{P}(C_2) = 2p(1-2p)$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour que A_{n+1} soit réalisé, il faut que A gagne la $n+1$-ème manche et que B ou C gagne la n-ème manche sans pour autant gagner le jeu, d'où $\mathbb{P}(A_{n+1}) = (\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n)) \times p$, donc $a_{n+1} = p(b_n + c_n)$.
   De même pour B : $b_{n+1} = p(a_n + c_n)$ (probabilité que A ou C gagne la n-ème manche sans gagner le jeu puis que B gagne la $n+1$-ème).
   De même pour C : $c_{n+1} = (1 - 2p(a_n + b_n)$ (probabilité que A ou B gagne la n-ème manche sans gagner le jeu, puis que C gagne la $n+1$-ème.

(c) Raisonnons par récurrence : pour $n = 1$ on a déjà montré que $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(B_1)$.
Supposons que $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_n)$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Alors d'après la question précédente : $\mathbb{P}(A_{n+1}) = p(\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n)) = p(\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(C_n)) = \mathbb{P}(B_{n+1})$ par hypothèse de récurrence, donc l'égalité est encore vraie au rang $n + 1$. Par récurrence on en conclut que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_n)$.
On a donc $\mathbb{P}(C_{n+1}) = 2(1 - 2p)\mathbb{P}(A_n)$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 0 & p & p \\ p & 0 & p \\ 1-2p & 1-2p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pb_n + pc_n \\ pa_n + pc_n \\ (1-2p)a_n + (1-2p)b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

4. (a) Il suffit de calculer et de vérifier que $P \times P^{-1} = I$. C'est bien le cas donc P est inversible d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) On calcule :

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc D est bien diagonale.

(c) Pour $n = 0$ on a $A^0 = I$ par définition, et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$, donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.
Remarquons que grâce au résultat précédent on a $PDP^{-1} = A$ en multipliant par P à gauche et P^{-1} à droite.
Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour un certain entier n.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= PDP^{-1}PD^nP^{-1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PDID^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc l'égalité est encore vraie pour $n + 1$.
Par récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

(d) Comme $X_{n+1} = AX_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on en déduit par récurrence immédiate que $X_n = A^{n-1}X_1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^{n-1} = \frac{1}{5^{n-1}}\begin{pmatrix} 3^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix}$ et $A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$ donc $X_n = PD^{n-1}P^{-1}X_1$ avec $X_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
a_n est la première ligne de X_n donc il suffit de calculer la première ligne de $PD^{n-1}P^{-1}X_1$:

$$
\begin{aligned}
PD^{n-1}P^{-1}X_1 &= \frac{1}{50\times 5^{n-1}}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\2&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^{n-1}&0&0\\0&(-2)^{n-1}&0\\0&0&(-1)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3&2\\2&2&-2\\5&-5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{50\times 5^{n-1}}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\2&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^{n-1}&0&0\\0&(-2)^{n-1}&0\\0&0&(-1)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\-2\\0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{50\times 5^{n-1}}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\2&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\times 3^{n-1}\\(-2)^{n}\\0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{50\times 5^{n-1}}\begin{pmatrix}12\times 3^{n-1}+(-2)^{n}\\ *\\ *\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{12\times 3^{n-1}+(-2)^n}{50\times 5^{n-1}} = \dfrac{4\times 3^n+(-2)^n}{10\times 5^n}$.

(e) On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{4\times 3^n+(-2)^n}{10\times 5^n}$$

et pour tout $n\geq 2$:

$$c_n = \frac{3}{5}\times 2a_{n-1} = \frac{6}{5}\times\frac{4\times 3^{n-1}+(-2)^{n-1}}{10\times 5^{n-1}} = \frac{4\times 3^n+3\times(-2)^{n-1}}{5^{n+1}}$$

pour $n=1$ on a $c_1 = 1-2p = \dfrac{3}{5}$, et $\dfrac{4\times 3^1+3\times(-2)^0}{5^2} = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5}$, donc la formule précédente est encore valable pour $n=1$ donc valable pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

(f) Le jeu n'est pas achevé à l'issue de la n-ème manche si A_n, B_n ou C_n est réalisé. Ces trois événements étant incompatible on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n\cup B_n\cup C_n) &= \mathbb{P}(A_n)+\mathbb{P}(B_n)+\mathbb{P}(C_n)\\
&= \frac{4\times 3^n+(-2)^n}{5^{n+1}} + \frac{4\times 3^n+3\times(-2)^{n-1}}{5^{n+1}}\\
&= \frac{8\times 3^n+(-2)^{n-1}}{5^{n+1}}\\
&= \frac{8}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{1}{25}\times\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

comme $-1<\frac{3}{5}<1$ et $-1<-\frac{2}{5}<1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n = 0$ donc par produit et somme de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n\cup B_n\cup C_n) = 0$.

Problème

1. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ on a $H_{n+1}-H_n = \sum_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n+1} \geq 0$ donc (H_n) est croissante.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$
\begin{aligned}
H_{2n}-H_n &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

or pour tout $k \in \{n+1, ..., 2n\}$, $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{2n}$ donc :

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \\
&\geq \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} 1 \\
&\geq \frac{1}{2n} \times n \\
&\geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3. (H_n) est croissante, donc soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$.
Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} H_{2n} = \ell$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_{2n} - H_n) = 0$. Par passage à la limite dans l'inégalité $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ on obtient $0 \geq \frac{1}{2}$, contradiction.
On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.
4. Comme $w_n \sim \dfrac{1}{n}$, il existe une suite (α_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{\alpha_n}{n}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$ il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $1 - \varepsilon < \alpha_n < 1 + \varepsilon$, d'où en multipliant par $\dfrac{1}{n}$:
$$\frac{1-\varepsilon}{n} < \frac{\alpha_n}{n} < \frac{1+\varepsilon}{n}$$
donc
$$\frac{1-\varepsilon}{n} < w_n < \frac{1+\varepsilon}{n}$$
5. Pour tout $n > n_0$:
$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n} w_k \\
&= \sum_{k=1}^{n_0} w_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} w_k
\end{aligned}$$
donc en sommant les inégalités de la question précédente :
$$\begin{aligned}
T_n &\geq \sum_{k=1}^{n_0} w_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1-\varepsilon}{k} \\
&\geq \sum_{k=1}^{n_0} + (1-\varepsilon) \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k} \\
&\geq \sum_{k=1}^{n_0} + (1-\varepsilon)(H_n - H_{n_0})
\end{aligned}$$
6. Comme $(1-\varepsilon) > 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\varepsilon)(H_n - H_{n_0}) = +\infty$ d'après la question 3, et $\sum_{k=1}^{n_0} w_k$ est une constante, donc par somme de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$.
7. Si $p = 0$ on a $u_n = \dfrac{1}{C_n^n} = 1$, donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
Si $p = 1$, on a $u_n = \dfrac{1}{C_{n+1}^n} = \dfrac{1}{n+1}$ donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \dfrac{1}{k} = H_{n+1} - 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ d'après la question 3.

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
(n+p+2)u_{n+2} &= (n+p+2) \times \frac{(n+2)!p!}{(n+p+2)!} \\
&= \frac{(n+2)!p!}{(n+p+1)!} \\
&= (n+2) \times \frac{(n+1)!p!}{(n+p+1)!} \\
&= (n+2) \times u_{n+1}
\end{aligned}$$

(b) Pour $n=1$ on sait que $S_1 = u_1 = \dfrac{1}{C_{p+1}^1} = \dfrac{1}{p+1}$, et $u_2 = \dfrac{1}{C_{p+2}^2} = \dfrac{2!p!}{(p+2)!} = \dfrac{2}{(p+1)(p+2)}$ donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p-1}(1-(1+p+1)u_2) &= \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{2(p+2)}{(p+1)(p+2)}\right) \\
&= \frac{1}{p-1}\left(\frac{p+1}{p+1} - \frac{2}{p+1}\right) \\
&= \frac{p+1-2}{(p-1)(p+1)} \\
&= \frac{1}{p+1}
\end{aligned}$$

donc on a bien l'égalité voulue pour $n=1$.
Supposons l'égalité vraie pour un entier naturel n non nul quelconque. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p-1}\left(1-(n+1+p+1)u_{n+2}\right) &= \frac{1}{p-1}\left(1-(n+p+2)u_{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{p-1}\left(1-(n+2)u_{n+1}\right) && \text{d'après la question précédente} \\
&= \frac{1}{p-1}\left(1-(n+p+1+1-p)u_{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{p-1}\left(1-(n+p+1)u_{n+1}\right) + \frac{1-p}{1-p}u_{n+1} \\
&= S_n + u_{n+1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= S_{n+1}
\end{aligned}$$

donc l'égalité est encore vraie au rang $n+1$.
Par récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$S_n = \frac{1}{p-1}\left(1-(n+p+1)u_{n+1}\right)$$

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= (n+p+1)u_{n+1} - (n+p)u_n \\
&= \frac{(n+p+1)(n+1)!p!}{(n+p+1)!} - \frac{(n+p)n!p!}{(n+p)!} \\
&= \frac{(n+1)!p! - (n+p)n!p!}{(n+p)!} \\
&= \frac{n!p!}{(n+p)!}(n+1-(n+p)) \\
&= \frac{(1-p)n!p!}{(n+p)!}
\end{aligned}$$

avec $1 - p < 0$ par hypothèse donc $v_{n+1} - v_n < 0$, donc (v_n) est décroissante.

(b) Comme (v_n) est clairement positive, et décroissante d'après la question précédente, on en conclut que (v_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$.

(c) On a $(n+p+1)u_{n+1} = v_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+p+1)u_{n+1} = \ell$.

Par opérations sur les limites dans l'égalité de la question 8.b) on obtient que S_n converge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{1-\ell}{p-1}$.

10. (a) Comme $u_n = \dfrac{v_n}{n+p}$ et que $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ell$ et $n + p \underset{n \to +\infty}{\sim} n$ on en déduit $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n}$.

(b) D'après la partie II, comme $u_n \sim \dfrac{\ell}{n}$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$, ce qui contredit le fait que (S_n) converge d'après la question 9.c).

11. On déduit des questions précédentes que $\ell = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{1}{p-1}$.